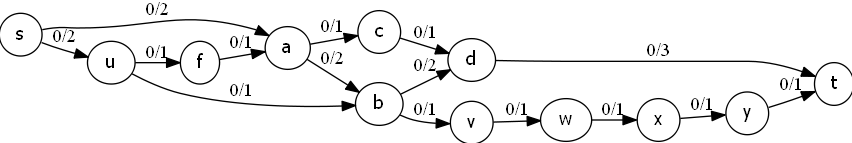
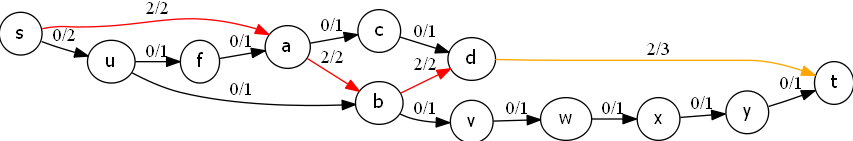
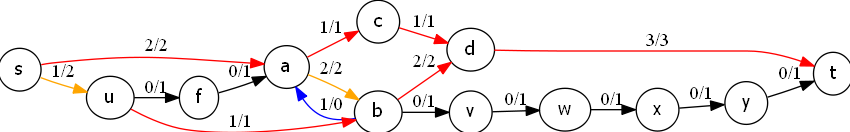
# שאלה 1.



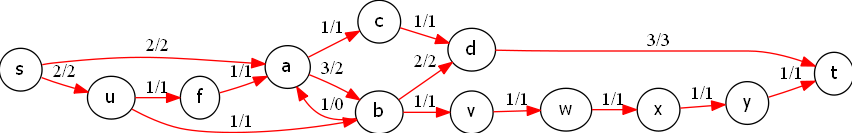
*מסלול s-a-b-d-t*



*מסלול s-u-b-a-c-d-t*



*מסלול s-u-f-a-b-v-w-x-y-t*



*הקשת המתאימה בריצה זו היא . באיטרציות הראשונה והאחרונה תוספת הזרימה דרך היא זהה לקיבולת השיורית שלה.*

# שאלה 2

א.

תהי זרימה ברשת שערכה (מהנתון קיימת כזו).

ונניח שאנו רוצים להגדיל את ערך הזרימה ל- אז נכפיל את הזרימה דרך כל קשת ב .

מובן שתנאי נשמר.

כמו כן .

ולכן הזרימה שמתקבלת חוקית וערכה:

כנדרש.

ב.

**רעיון כללי:**

ראשית ניתן לכל קשת בתור התחלה את הקיבול המינימאלי שלה בתור הזרם.

שלב א' – נפעפע חוסר בזרימה יוצאת לכיוון : נעבור על הקודקודים ע"פ המרחק שלהם ל- מהגדול עד 1, ובכל קודקוד (למעט ) שהזרימה היוצאת ממנו קטנה מהזרימה הנכנסת אליו, נעביר זרם נוסף באחת הקשתות שמובילות לקודקודים שמרחקו ל- קטן יותר.

שלב ב' – נפעפע עודף בזרימה יוצאת לכיוון : נעבור על הקודקודים מהמרחק הגדול מ- ועד למרחק 1 מ- ובכל קודקוד שהזרימה היוצאת ממנו גדולה מהזרימה הנכנסת אליו נגדיל את הזרימה בקשת שמובילה אל הקודקוד בהפרש הזרימה.

באופן כזה אנו דואגים שיתקיים שימור זרימה בכל הקודקודים למעט וכמובן שכל הזרימות מעל הקיבול המינימאלי.

**האלגוריתם:**

נוסיף שדה זרם לכל קודקוד המאותחל: .

נבצע סריקת בגרף מ-, כולל שמירת הקשת שהובילה לכל קודקוד ב-, וכולל חלוקת הקודקודים לתורים בהתאם למרחקם מ- וכמו כן בכל קשת שנבקר בה נבצע:

נבצע גם סריקת בהליכה הפוכה בקשתות הגרף מ-, כולל שמירת הקשת שמובילה מכל קודקוד ב-, וכולל חלוקת הקודקודים לתורים בהתאם למרחקם ל-.

*נעבור על הקודקודים לפי מרחקם ל- בסדר יורד (לא כולל ) ולכל קודקוד המקיים נסמל את בתור הקודקוד השני ב- נבצע:*

*נעבור על הקודקודים לפי מרחקם מ- בסדר יורד (לא כולל ) ולכל קודקוד המקיים נסמל את בתור הקודקוד הראשון ב- נבצע:*

***הסבר ונכונות:***

*ראשית, כל הקשתות מקבלות זרם שהוא הקיבולת המינימאלית עבורן ובהמשך האלגוריתם זרם יכול רק להתווסף לקשתות ולא לרדת, ולכן התנאי מתקיים בתוצאה.*

*לאחר מכן אנו מתקנים את כל הקודקודים שמפרים את כלל שימור הזרימה משום שנכנסת אליהם יותר זרימה משיוצאת, מאחר ואנו מעבירים את הפרש הזרימה לקודקודים שיתוקנו בהמשך מבחינת סדר המעבר על הקודקודים (או ל-), אנו בטוחים כי בסוף ריצת החלק הזה של האלגוריתם כל הקודקודים שצריכים לקיים שימור זרימה מוציאים זרימה לפחות בגודל הזרימה שנכנסת אליהם.*

*לאחר מכן אנו מתקנים את כל הקודקודים שמפרים את כלל שימור הזרימה משום שנכנסת אליהם פחות זרימה משיוצאת, מאחר ואנו מכניסים את הפרש הזרימה מקודקודים שיתוקנו בהמשך מבחינת סדר המעבר על הקודקודים (או מ-), אנו בטוחים כי בסוף ריצת החלק הזה של האלגוריתם כל הקודקודים שצריכים לקיים שימור מקבלים זרימה לפחות בגודל הזרימה שנכנסת אליהם.*

*יש לציין שהחלק השני של התיקונים לא פוגע בראשון, הזרם שנשאר בקודקוד יכול רק לקטון ולכן לא יתכן שפעולת התיקון תגרום לו להדרש לסוג התיקונים הראשון.*

*בסיכומו של דבר הזרימה בגרף שמתקבלת עומדת בכל התנאים בשאלה.*

**זמן ריצה:**

זמן הריצה הוא זמן של שני ועוד זמן של שני מעברים על כל קודקודי הגרף,

כלומר .

ג.

נפעיל את האלגוריתם למציאת זרימה חוקית מסעיף ב' על .

לאחר מכן נבנה את רשת הזרימה , הופכית ל- כך שערכי הקיבול של הם עודפי הזרימה מעבר לחסמים התחתונים ב-:

נריץ על כאשר קודקוד המקור של הזרם הוא וקודקוד היעד הוא (נדגיש שהפעם ערכי הקיבול הם חסמים מלמעלה ולא מלמטה על הזרימה).

נקבל זרימה חוקית ומקסימלית שניתן להחסיר מהזרימה החוקית על מבלי שהזרימה באף קשת תרד מתחת לחסם התחתון שלה.

כעת נבצע את חיסור הזרימה:

ובזאת קיבלנו זרימה חוקית מזערית.

**נכונות וזמן ריצה:**

מתקיים שימור זרימה בכל הקודקודים למעט :

* ראשית הוכחנו בסעיף ב' שהאלגוריתם מביא לזרימה חוקית בה מתקיים שימור זרימה.
* כעת אנו מחסרים תוצאת זרימה המקיימת שימור זרימה מהזרימה החוקית שנמצאה – מובן שכל הקודקודים (למעט ) עדיין מקיימים שימור זרימה.

אין קשת בה הזרימה קטנה מהחסם התחתון של הקיבול שלה:

* ראשית הוכחנו בסעיף ב' שהאלגוריתם מביא לזרימה חוקית בה אין קשת עם זרימה קטנה מהקיבול שלה.
* כעת אנו מגבילים בריצת Edmonds-Karp על G’ את הקיבול של כל קשת להפרש בין הזרימה שהתקבלה בזרימה החוקית לבין הקיבול שחוסם אותה מלמטה – לכן כשאנו מחסרים את הזרימה שהתקבלה ב- מהזרימה ב- אנו חייבים לקבל ערך גדול או שווה לקיבול.

הזרימה היא מינימאלית:

* נניח בשלילה שהזרימה לא מינימאלית – אז יש מסלול בו עוברת זרימה "מיותרת" מ- ל-, ובפרט בכל הקשתות במסלול הזה הזרם הינו מעבר לקיבול החוסם את הזרימה מלרע.
* אבל אז נובע שבגרף השיורי של היה מסלול שיפור אך האלגוריתם Edmonds-Karp לא מצא אותו – וזו סתירה לכך שכל התשובות של האלגוריתם הן נכונות.
* לכן נסיק כי הזרימה אכן מינימאלית.

בזאת הוכחנו נכונות.

~~

זמן הריצה של הפעלת האלגוריתם למציאת זרימה חוקית, לבניית ולעדכון הזרימות הוא ,

הגודל של הוא במקרה הגרוע כגודל של לכן זמן הריצה הדומיננטי הוא זמן הריצה של Edmonds-Karp על , .

כלומר זמן הריצה הכולל הוא .

**ן**

# שאלה 3

א.

הזרימה המרבית יכולה לגדול לכל היותר ב-1 בעקבות השינוי ב-, וזאת אם יש מסלול זרימה נוסף במשקל 1 שעובר דרך , אחרת היינו מקבלים סתירה לכך שהזרימה הייתה מרבית.

נריץ איטרציה אחת של Edmonds-Karp על הגרף המעודכן – אם אכן יש מסלולי זרימה דרך האיטרציה תמצא אחד מהם והזרימה תשתפר ב-1, ואחרת הזרימה המירבית נותרת כפי שהייתה.

עלות איטרציה אחת של Edmonds-Karp כעלות , , כלומר , עלות לינארית.

ב.

אם צריך לתקן את רשת הזרימה.

נסמן . עלינו למצוא מסלול זרימה שעובר דרך ולהוריד בכל הקשתות שבו את הזרימה ב-1.

נריץ בכיוון ההפוך של הקשתות מ- כאשר נתקדם רק בקשתות שיש בהן זרימה, קיים מסלול ל- שכן והרי שהזרימה מקורה ב-.להוריד בכל הקשתות בו את הזרימה ב-1.

נריץ מ- כאשר נתקדם רק בקשתות שיש בהן זרימה, קיים מסלול ל- שכן והרי שהזרימה מקורה ב-.

כעת נוריד את הזרימה ב-1 לאורך המסלול שמצאנו בסריקות.

כעת עדיין יכול להיות שיש מסלול שדרכו ניתן לשפר את הזרימה ב-1 (מאחר והקטנו את הזרימה דרך חלק מהקשתות ב-1), נריץ איטרציה אחת של Edmonds-Karp על הגרף.

זמן הריצה כמו בסעיף א' ועוד זמן ריצה של שני , בסה"כ עדיין , כלומר , עלות לינארית.

# שאלה 4

מהנתון שכל אחד מהמשתנים מופיע בדיוק בשלוש פסוקיות שונות מבין ושכל פסוקית מכילה בדיוק שלושה משתנים שונים נובע .

אם נמצא שידוך מונוגמי בין קבוצת המשתנים לבין קבוצת הפסוקיות כך שכל פסוקית משודכת למשתנה שמוכל בה, וכל משתנה משודך לכל היותר לפסוקית אחת, נוכל לקבוע את ערך האמת של המשתנה המוכל בכל פסוקית כך שערך האמת של הפסוקית יהיה True (אם מופיע נקבע , ואחרת ) ובמצב כזה נוכל למצוא הצבה שתאמת את הביטוי כולו בפרט נוכיח שהוא ספיק.

נגדיר גרף דו צדדי כאשר .

תהי קבוצת פסוקיות.

נראה כי .

ידוע כי מכל יוצאות שלוש קשתות ב-, כלומר בסה"כ מ- יוצאות קשתות.

נניח בשלילה כי , אבל ידוע כי כל משתנה מופיע בדיוק בשלוש פסוקיות, ולכן מספר הקשתות שנוגע ב- הוא קטן מ- וזו סתירה כי הקבוצה מוגדרת בדיוק על ידי קבוצת הקודקודים מ- שנוגעות בה קשתות.

כלומר לפי משפט קיים שידוך מושלם ולכן מן ההקדמה, קיימת הצבה שמספקת את הפסוק .

כדי למצוא את ההצבה הזו נבנה את הגרך בזמן , נריץ את האלגוריתם למציאת זיווג מושלם על ע"י רשת זרימה בזמן ואז בהתאם לשידוך נעבור על רשימת המשתנים ונקבע להם ערך אמת בזמן .

בסה"כ זמן הריצה הוא .